УДК 517.9

И.А. Сыпко
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83050, г. Донецк, пр. Богдана Хмельницкого, 84, *sypko_i@i.ua*

Численное моделирование процесса кристаллизации металла

I.A. Sypko
Donetsk National Technical University, Ukraine
Ukraine, 83050, c. Donetsk, Bogdana Khmelnitskogo av. 84, sypko_i@i.ua

Numerical Modeling of the Crystallization Process of Metal

І.О.Сипко
ДВНЗ Донецький національний технічний університет, м. Донецьк, Україна
83050, Донецьк, пр. Б.Хмельницького, 84, *sypko_i@i.ua*

Чисельне моделювання процесу кристалізації металу

Рассматривается задача тепловой обработки металла. Строится приближенное решение задачи. Получены оценки для температуры и теплового потока.
Ключевые слова: процесс кристаллизации, математическая модель, функция, жидкая фаза, конвекция.

Розглядається задача теплової обробки металу. Будується наближений розв’язок задачі. Доведені оцінки на температуру і тепловий потік.
Ключові слова: процес кристалізації, математична модель, функція, рідка фаза, конвекція.

The problem of thermal processing of metal is considered. The approximate solution is constructed. Estimations for a temperature and thermal stream are got.
Key words: process of crystallization, mathematical model, function, the liquid phase convection.

Распространение тепла в различных средах оказывает большое влияние на характер протекания многих важных для практики процессов. Среди задач, связанных с распространением тепла, выделяется класс задач, в которых исследуемое вещество переходит из одной фазы в другую с выделением или поглощением тепла.

Целью данной работы является моделирование процесса кристаллизации металла, изучение процесса завершения получения слитка в кристаллизаторе путем его вытягивания.

Рассматривается задача управления информационными процессами при автоматизации технологий тепловой обработки металла, на основе математического моделирования, анализа статистических данных и теплофизических экспериментальных измерений. В качестве источника информации исследуется математическая модель, основанная на пространственной задаче Стефана, с учетом конвективного движения и примесей в жидкой фазе.

Постановка задачи

Пусть $D=(-1<x<1, y<0)$ – полуполоса, заполненная твердым металлом. Обозначим через $u(x,y)$ температуру этого металла. Требуется определить температуру $u(x,y)$ по следующим условиям:

$$u_{xx}+u_{yy}+\omega u_y=0,(x,y)\in D, \quad (1)$$

$$u_x \pm \omega_0 u = 0, x = \pm 1, -\infty < y < 0, \quad (2)$$

$$u(x, -\infty) = 0, \quad (3)$$

$$u_y(x,0) = v(x), -1 \le x \le 1. \quad (4)$$

Здесь ω и ω_0 – постоянные, соответственно, число Пекле и Нуссельта. Решение задачи (1) – (4) имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\lambda_n x e^{\mu_n y}}{\mu_n (1+\omega_0 \dfrac{\cos^2\lambda_n}{\lambda_n^2})} \int_{-1}^{1} v(\zeta)\cos\lambda_n \zeta d\zeta, \quad (5)$$

где $\mu_n = -\frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \lambda_n^2}$, $n = 1,2,3...\lambda_n$ – положительные корни уравнения $\lambda = \omega_0 ctg\lambda$.

Отождествим теперь температуру $u(x,y)$ с температурой твердого слитка, находящегося в кристаллизаторе при электрошлаковом переплаве. Для вытягивания слитка из кристаллизатора поверхность слитка предварительно обогревается тремя электронными лучами W_1, W_2 и W_3, причем мощность W_3 одного из них равномерно распределена в центральной зоне $\{-1 \le x \ge 1, y = 0\}$, а два других сконцентрированы по краям $x = \pm 1$ [1]. Независимо от того, в каком отношении находится температура поверхности слитка с критической температурой T^*, при которой поверхность слитка отделяется от стенок кристаллизатора, теплообмен слитка с кристаллизатором осуществляется по формуле (2). Для получения температуры слитка достаточно положить в формуле (5) $v(x) = (W_1, W_2, W_3)$.

Далее, введем в рассмотрение функционал

$$I(v) = \int_{H}^{0} (u(1,y) - T^*)^2 dy. \quad (6)$$

Рассматривается задача. Требуется определить поток $v(x)$ из допустимого множества U, доставляющий наименьшее значение функционалу $I(v)$. Минимизирующая последовательность v_n строится по формуле $v_{n+1} = v_n + \varepsilon_n (v_{n-1} - v_n)$, параметр ε_n выбирается из условия $\min I(v_n + \varepsilon_n (v_{n-1} - v_n))$, $0 \le \varepsilon_n \le 1$ [2]. В качестве области определения функции U берется множество кусочно-постоянных ступенчатых функций:

$$v = v_k, x_k \le x \le x_{k+1}, v_k = const, k = 0,1,2,...,m.$$

При этом формула (5) примет вид:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\lambda_n x e^{\mu_n y}}{\mu_n (1+\omega_0 \dfrac{\cos^2\lambda_n}{\lambda_n^2})} \sum_{k=0}^{m} v_k \frac{\sin\lambda_n x_{k+1} - \sin\lambda_n x_k}{\lambda_n},$$

а $I(v) = I(v_0, v_1, v_2, ..., v_m)$.

При численной реализации задачи необходимо учесть ограничение $2500 \le v(x) \le 5000$, здесь $v(x)$ – мощность потока в единицах МВт/ м^2, а также $\omega = 2{,}66$, $\omega = 3{,}05$.

Способы решения задачи

Нулевое приближение. Найдем минимум функционала (6), в случае когда $u_0(x,y) = f_0(x,y)v$,

где $f_0(x,y) = 2\dfrac{\cos\lambda_0 x \sin\lambda_0}{\lambda_0\mu_0(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}e^{\mu_0 y}$.

Минимум функционала (6) находим из условия

$$\frac{\partial I}{\partial v} = 2\int_H^0 (f_0(1,y)v - T^*) f_0(1,y)dy = 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$v_0 = 4T^*\frac{\lambda_0\mu_0(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}{\sin 2\lambda_0},$$

$$I(v_0) = v_0^2\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{2\mu_0^3\lambda_0^2(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^2} - (T^*)^2 H - 2T^* v_0\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}.$$

Первое приближение**.** Найдем теперь минимум функционала (6), в случае когда $u_1(x,y) = (f_0(x,y) + f_1(x,y))v$, где $f_1(x,y) = 2\dfrac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}\dfrac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}$.

Поступая, аналогично тому, как это было сделано в случае нулевого приближения, получим $v_1 = 2T^*\left[\dfrac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} + \dfrac{\sin 2\lambda_2(1-e^{\mu_2 H})}{\lambda_1\mu_1^2(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}\right]A$,

где

$$A = \frac{\sin^2\lambda_0(1-e^{\mu_2 H})}{\lambda_0\mu_1^2(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^2} + \frac{\sin^2 2\lambda_1(1-e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^3\lambda_1^2(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})^2} + 2\frac{\sin 2\lambda_0 \sin 2\lambda_1}{\lambda_0\mu_0(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}\frac{(1-e^{\mu_0 H})(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_1\mu_1(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\mu}{\lambda_1^2})}.$$

Далее, имеет место следующая формула:

$$I(v_1) = v_1^2\frac{\sin^2 2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{2\mu_0^3\lambda_0^2(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^2} + v_1^2\frac{\sin^2 2\lambda_1(1-e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^3\lambda_1^2(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})^2} +$$

$$+ 2v_1^2\frac{\sin 2\lambda_0 \sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_1 H})(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_1\mu_1(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})\lambda_0\mu_0(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} -$$

$$-2T^* v_1\left[\frac{\sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_1\mu_1^2(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})} + \frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}\right] - H(T^*)^2.$$

Приближение любого порядка. Аналогичным образом можно исследовать минимум функционала $I(v_n)$, когда

$$u_n(x,y) = 2\frac{v_n \sin\lambda_0 \cos\lambda_0 x(1-e^{\lambda_0 H})}{\lambda_0\mu_0(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}e^{\mu_0 y} + 2\omega_0 v_n \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\lambda_k x\cos\lambda_k(1-e^{\mu_k H})}{\lambda_k^2\mu_k\left[1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}\right]}e^{\mu_k y}.$$

Оценить погрешность предлагаемого метода вычисления минимума функционала (6) можно, используя следующее утверждение.
При достаточно малых значениях ω и при $(x,y)\in\overline{D}$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\lambda_k x\cos\lambda_k(1-e^{\varpi_k H})}{\lambda_k^2\mu_k[1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}]}e^{\mu_k y}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2}e^{\mu_k y}.$$

При доказательстве этого утверждения воспользоваться соотношением: $\lambda_n = n\pi + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$ для всех n [2]. Справедливо также утверждение.

Пусть выполнены условия $\omega_0 \ge \omega\sqrt{2}tg\omega\sqrt{2}$, $0<\omega\le A$, $0<A\le\dfrac{\pi^2}{16}$, $0<v_0\le v(x)<v_1$ при $x\in[-1,1]$, где v_0 и v_1 – некоторые постоянные. Тогда решение краевой задачи (1) – (5) удовлетворяет следующим условиям при $(x,y)\in\overline{D}$:

$$u_y(x,y)\le C_1\omega\exp(\mu_0 y)\le C_1\omega\exp(\omega y),$$

$$C_0\exp(\mu_0 y)\le u(x,y)\le C_1\exp(\mu_0 y)\le C_1\exp(\omega y),$$

где $C_1 = \dfrac{6+A(1+\cos\sqrt{A})}{3(1+\cos\sqrt{A})}$, $C_0 = \dfrac{3(1-A)(1+\cos^2\sqrt{A})\cos^2\sqrt{A}}{6+A(1+\cos^2\sqrt{A})}$.

Для утверждения необходимо сравнить с помощью принципа максимума функции $u_y(x,y)$ и $v(x,y)$, где $v(x,y)$ – решение задачи (1) – (5) в предположении, что $v_y(x,0)=v_1$ при $x\in[-1,1]$. Далее, рассматривается функция $f(x,y)=v_y(x,y)-u_y(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$ и доказывается, что $f(x,y)\ge 0$ в $\overline{D}$. Действительно, функция $f(x,y)$ не может принимать наименьшее отрицательное значение внутри D в силу принципа максимума. На вертикальных частях границы $x=\pm 1$ функция $f(x,y)$ также не может принимать отрицательный минимум. В такой точке имели бы $f_x(x,y)<0$, между тем $f_x(x,y) = -\omega_0 f(x,y)>0$, $x=\pm1$, так как $f(x,y)<0$, по предположению. На бесконечности функция $f(x,y)$ исчезает, т.е. $f(x,-\infty)=0$. На границе $y=0$, $-1\le x\le 1$ имеем $f(x,0)=v_y(x,0)-u_y(x,0)=v_1-v(x)\ge 0$. Следовательно, всюду в $\overline{D}$ справедливо неравенство $u_y(x,y)\le v_y(x,y)$ при $(x,y)\in\overline{D}$. Отсюда с помощью интегрирования по переменной y следует оценка для функции $u(x,y)$ сверху. Аналогичным образом, можно получить оценку на производную $u_x(x,y)$ сверху при $(x,y)\in\overline{D}$. Полученные оценки позволяют оценить температуру $u(x,y)$ и тепловой поток внутри области D не прибегая к решению задачи (1) – (5) [3-6].

Проделанные численные результаты задачи представлены в табл. 1 – 4.

Таблица 1 – Численные результаты при различных значениях параметров

ω_0	λ_0	λ_1	T	H	υ_0	υ_1	I (υ_0)	I (υ_1)
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-3,0	2,783	4,367	1,011	21,997
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-4,0	2,783	5,730	5,428	38,576
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-6,0	2,783	6,588	-3,038	62,490
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-3,0	2,937	4,610	1,126	24,509
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-4,0	2,937	5,730	-0,559	42,982
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-6,0	2,937	6,954	-3,385	69,627
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-3,0	4,5	4,5	16,728	23,709
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-4,0	4,5	4,5	15,256	24,355
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-6,0	4,5	4,5	12,397	25,275
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-3,0	4,5	4,5	15,537	23,062
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-4,0	4,5	4,5	13,866	23,695
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-6,0	4,5	4,5	10,718	24,696
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-3,0	11,1	11,1	173,683	192,101
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-4,0	11,1	11,1	175,717	198,788
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-6,0	11,1	11,1	173,351	202,940
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-3,0	11,1	11,1	171,150	190,098
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-4,0	11,1	11,1	172,831	196,617
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-6,0	11,1	11,1	170,023	200,697

Таблица 2 – Численные результаты при различных значениях параметров

ω_0	λ_0	λ_1	T	H	υ_0	υ_1	I (υ_0)	I (υ_1)
2,0	1,0769	3,6436	0,9	-3,0	3,026	4,949	2,686	26,439
2,0	1,0769	3,6436	0,9	-4,0	3,026	6,212	1,213	47,388
2,0	1,0769	3,6436	0,9	-6,0	3,026	7,642	-1,364	78,991
2,0	1,0769	3,6436	0,95	-3,0	3,194	5,224	2,993	29,459
2,0	1,0769	3,6436	0,95	-4,0	3,194	6,557	1,352	52,799
2,0	1,0769	3,6436	0,95	-6,0	3,194	8,066	-1,520	88,011
2,0	1,0769	3,6436	0,9	-3,0	4,5	4,5	16,436	20,858
2,0	1,0769	3,6436	0,9	-4,0	4,5	4,5	15,077	21,560
2,0	1,0769	3,6436	0,9	-6,0	4,5	4,5	12,270	22,543
2,0	1,0769	3,6436	0,95	-3,0	4,5	4,5	15,298	20,262
2,0	1,0769	3,6436	0,95	-4,0	4,5	4,5	13,741	20,952
2,0	1,0769	3,6436	0,95	-6,0	4,5	4,5	10,643	22,014
2,0	1,0769	3,6436	0,9	-3,0	11,1	11,1	168,455	171,436
2,0	1,0769	3,6436	0,9	-4,0	11,1	11,1	171,102	178,385
2,0	1,0769	3,6436	0,9	-6,0	11,1	11,1	169,172	183,045
2,0	1,0769	3,6436	0,95	-3,0	11,1	11,1	166,052	169,559
2,0	1,0769	3,6436	0,95	-4,0	11,1	11,1	168,350	176,343
2,0	1,0769	3,6436	0,95	-6,0	11,1	11,1	165,972	180,926

Таблица 3 – Численные результаты при различных значениях параметров

ω_0	λ_0	λ_1	T	H	υ_0	υ_1	I (υ_0)	I (υ_1)
3,0	1,1925	3,8088	0,9	-3,0	3,352	6,516	7,280	45,840
3,0	1,1925	3,8088	0,9	-4,0	3,352	8,405	6,004	87,001
3,0	1,1925	3,8088	0,9	-6,0	3,352	10,746	3,378	157,183
3,0	1,1925	3,8088	0,95	-3,0	3,539	6,878	8,112	51,075
3,0	1,1925	3,8088	0,95	-4,0	3,539	8,871	6,690	96,936
3,0	1,1925	3,8088	0,95	-6,0	3,539	11,343	3,764	175,133
3,0	1,1925	3,8088	0,9	-3,0	4,5	4,5	20,167	18,438
3,0	1,1925	3,8088	0,9	-4,0	4,5	4,5	19,216	19,255
3,0	1,1925	3,8088	0,9	-6,0	4,5	4,5	16,548	20,267
3,0	1,1925	3,8088	0,95	-3,0	4,5	4,5	19,061	17,873
3,0	1,1925	3,8088	0,95	-4,0	4,5	4,5	17,904	18,668
3,0	1,1925	3,8088	0,95	-6,0	4,5	4,5	14,927	19,741
3,0	1,1925	3,8088	0,9	-3,0	11,1	11,1	188,971	154,728
3,0	1,1925	3,8088	0,9	-4,0	11,1	11,1	194,686	162,962
3,0	1,1925	3,8088	0,9	-6,0	11,1	11,1	194,771	168,964
3,0	1,1925	3,8088	0,95	-3,0	11,1	11,1	186,651	152,926
3,0	1,1925	3,8088	0,95	-4,0	11,1	11,1	191,994	160,973
3,0	1,1925	3,8088	0,95	-6,0	11,1	11,1	191,588	166,853

Таблица 4 – Численные результаты при различных значениях параметров

ω_0	λ_0	λ_1	T	H	υ_0	υ_1	I (υ_0)	I (υ_1)
4,0	1,2646	3,9352	0,9	-3,0	3,560	8,457	13,134	80,696
4,0	1,2646	3,9352	0,9	-4,0	3,560	11,217	12,291	162,631
4,0	1,2646	3,9352	0,9	-6,0	3,560	14,954	9,811	321,551
4,0	1,2646	3,9352	0,95	-3,0	3,758	8,927	14,634	89,911
4,0	1,2646	3,9352	0,95	-4,0	3,758	11,840	13,694	181,203
4,0	1,2646	3,9352	0,95	-6,0	3,758	15,785	10,932	358,271
4,0	1,2646	3,9352	0,9	-3,0	4,5	4,5	26,374	17,467
4,0	1,2646	3,9352	0,9	-4,0	4,5	4,5	26,115	18,407
4,0	1,2646	3,9352	0,9	-6,0	4,5	4,5	23,830	19,422
4,0	1,2646	3,9352	0,95	-3,0	4,5	4,5	25,268	16,899
4,0	1,2646	3,9352	0,95	-4,0	4,5	4,5	24,790	17,804
4,0	1,2646	3,9352	0,95	-6,0	4,5	4,5	22,171	18,855
4,0	1,2646	3,9352	0,9	-3,0	11,1	11,1	226,770	148,999
4,0	1,2646	3,9352	0,9	-4,0	11,1	11,1	237,580	158,868
4,0	1,2646	3,9352	0,9	-6,0	11,1	11,1	241,625	166,516
4,0	1,2646	3,9352	0,95	-3,0	11,1	11,1	224,449	147,191
4,0	1,2646	3,9352	0,95	-4,0	11,1	11,1	234,854	156,838
4,0	1,2646	3,9352	0,95	-6,0	11,1	11,1	238,346	164,304

Список литературы

1. Патон Б.Е. Избранные труды / Патон Б.Е. – Киев : Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.
2. Шевченко А.И. Методы исследования нелинейных моделей / А.И. Шевченко, А.С. Миненко. – Киев: Наук. думка, 2012. – 132 с.

3. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей / Миненко А.С. – Киев : Наук.думка, 2005 – 341 с.
4. Шевченко А.И. Моделирование одного класса сложных систем с нечетким управлением / А.И. Шевченко, А.С. Миненко, И.А. Сыпко // Доп. НАН України. – 2013. – № 8. – С. 52-54.
5. Сыпко А.И. Приближенное моделирование процесса кристаллизации при наличии конвекции / А.И. Сыпко // Искусственный интеллект – 2013. – № 2. – С. 80-85.
6. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов – Москва : Наука, 1980. – 686 с.

References

1. Paton B.E. Selected works / Paton B.E. - Kiev: Electric Welding Institute named E.O. Paton of the NAS of Ukraine, 2008. –893s.
2. Shevchenko A.I., Minenko A.S. Methods for the study of nonlinear models. – Kiev: Naukova Dumka, 2012. – 132 s.
3. Minenko A.S. Variational problems with free boundaries – Kiev: Naukova Dumka, 2005. – 341s.
4. Shevchenko A.I., Minenko A.S., I.A. Sypko Modeling of the one class complex systems whit fuzzy control // Reports of National Academy of Sciences of Ukraine –2013. – № 8. – P. 52-54.
5. I.A. Sypko Approximate modeling of the crystallization process in the presence of convection // Artificial intelligence –2013. – №2. – P.80-85.
6. Budak B.M., Samarskiy A.A., Tikhonov A.N. Collection of problems on mathematical physics. – Moscow: Science, 1980. – 686 p.

RESUME

I.A. Sypko

Numerical Modeling of the Crystallization Process of Metal

Background. Heat propagation in various media has a great influence on the course of many important to practice processes. Among the problems associated with the distribution of heat, there is a class of problems in which the investigated substance passes from one phase to another, with the release or absorption of heat.

Materials and methods. The purpose of this work is to substantiate the mathematical model of the process of crystallization of metal. The problem of control of technological process of metals thermal processing is considered. As information resource the three dimension convection Stefan problem in liquid phase is investigated.

Result. This paper extend to time-dependent case some result obtained by the author for steady-state Stefan problem with convection. To determine the optimal thermal conditions of formation of ingot calculations were carried out in the framework of the mathematical model of thermal processes in a cylindrical ingot, adapted for the case of hollow ingot. In the model of liquid metal is poured into the mould portions, and a wedge of it is pulled out periodically.

Conclusion. A mathematical model which allows to determine the thermal mode in which it is defined. Simulated process of crystallization of metal, passing in special metallurgy, namely studied the process of completion of the receipt of an ingot in the mould by stretching.

The problem of thermal processing of metal is considered. The approximate solution is constructed. Estimations for a temperature and thermal stream are got.

The relevance of the presented work is due both to the practical demands of fuzzy control of the process of crystallization for the object with complex geometry.

Статья поступила в редакцию 25.12.2013.